〔共同研究：ことばと論理（Ⅱ）〕

正方形の対角線と辺の線型通約不能性に関するユークリッド以前のアルカイックな証明について

山　川　偉　也*

I

ピュタゴラス主義の伝承と科学に関する著名な書物[1]において，W. ブルケルトは，ギリシア演繹数学形成史におけるピュタゴラス学派の意義を検討し，結論として，それが無に等しいものであったとなす評価を下した。その評価の最重要なメルクマールとなったのは，ハイベルク版ユークリッド『原論』第X巻付録27のうちに，はたしてピュタゴラス学派に帰せられてよい数論上のなんらかの業績が認められうるか否かであった。

問題の付録27では，正方形の1辺と対角線が線型通約不能であることが帰謬法を用いて次のように証明されている。すなわち，正方形における辺と対角線が通約可能だと仮定すると，同じ数が偶数かつ奇数であるという不可能事が帰結されることになるが，これはありえないことである，したがって，正方形の辺と対角線は互いに通約不能である，と。この証明の基本前提は，その起源がきわめて古いものであることが分かっているピュタゴラスの定理と，いまひとつ，数はすべて偶数か奇数であるというものであるが，この後者の前提を，初期ピュタゴラスの徒が数論上の公理命題としていたかどうかが，この命題の証明を（通常ひとびとがそうしているように）ピュタゴラス学派に帰してよいかどうかの決定的メルクマークとされたわけである。

ブルケルトはこの件について否定的判断を下し，こう述べた。「すべて数は偶数であるか奇数であるかであって第三項は存在しない（*tertium non datur*）という，無理性の数論的証明にとって基本的な公理は，そのままのかたちでは，端的にいって，ピュタゴラス学派の思弁に存在しない」[2]，と。

ところで，この件をめぐるブルケルトの議論は，ピュタゴラス学派の数学に関するO. ベッカーの一連の主張[3]を反駁するなかで展開されている。周知のとおりO. ベッカーは，ユークリッド『原論』第IX巻命題21–34に収録されている所謂「偶数奇数論」を，アリストテレスがピュタゴラス学派に帰しているアルカイックな「小石（ψῆφοι）」算に関連づけ，これらの命題を素朴な ψῆφοι 数論の文脈内に位置づけ復元するとともに，このプリミティブな数論にみられる小理論体系こそは，ピュタゴラス学派の原型的演繹的数論の体系の存在を証示するものであって，ユークリッド『原論』にみられるごとき厳密な演繹数学の体系は，この伝統を引き継ぐ路線において形成された，と主張した[4]。そ

*本学文学部

1) Walter Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, 1972.

2) *Ibid.*, 434.

3) O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg–Munich, Albert, 1954.
——, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen :Vandenhoeck & Ruprecht, 1957.
——, “Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente,” *Qellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* 3, 1936, 533–553.

4) O. Becker, “Die Lehre vom Geraden und↗

れぱかりではない。彼は『原論』第X巻付録27命題を，このプリミティブな $\psi\tilde{\eta}\phi o\iota$ 数論に関連づけ，これに先行し，辺と対角線の間の互いに素な関係を前提としないところの，正方形の辺と対角線の線型通約不能性に関するプリミティブな証明を復元提示してみせたのであった[5]。O．ベッカーによるこれら一連の業績は，ピュタゴラス学派のコスモロジーにおける限定一無限，奇数一偶数の基本的対立図式や，前500年頃活躍した喜劇作家エピカルモスの，ピュタゴラス学派の偶数奇数論を戯画化したともみられる小喜劇作品断片に関連づけられ，こうして問題の偶数奇数論は，きわめて古い時代のピュタゴラス学派の数論の一所産であるとみなされることになった。

ブルケルトによるベッカー批判の主眼点は，ベッカーが『原論』第X巻付録27と「偶数奇数論」を重ね合わせるその仕方に向けられている。ベッカー批判の基底をなすブルケルトの主張は，以下の3つの命題のかたちで提示することができるであろう[6]。

1．『原論』第X巻付録27に先行し，$\psi\tilde{\eta}\phi o\iota$ をもって例示なされうるとベッカーの主張するところの，正方形の辺と対角線の間での偶数奇数論による線型通約不能性に関する証明は，実際には $\psi\tilde{\eta}\phi o\iota$ では決して表現できない。$\psi\tilde{\eta}\phi o\iota$ を用いての数論と無理性の理論とは，相互に背反する。
2．ピュタゴラス学派は単位（＝1）を偶数かつ奇数であるとみなした。しかるに，『原論』第X巻付録27における線型通約不能性の証明の基本的前提は，すべての数は偶数であるか奇数であるかだとする偶数奇数間の完全な排反的関係である。これが前提となってはじめて，付録27の証明は妥当となる。
3．無理性の発見は，元来，数論の領域においてなされたのではなくて，幾何学の領域においてなされたものであると考えるべき理由がある。「通約不能」（$\dot{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$）という言葉も，もともとは，幾何学の領域からきた言葉である。

ブルケルトによるこれらの命題のうち，わたしは，1と3は条件つきで認め，2については，これまた条件付きで却下する。そして，そのことを通じて，全体としてはブルケルトの主張を却下し，『原論』第X巻付録27に先行するアルカイックな無理性の証明が，ピュタゴラス学派の偶数奇数論ないし図形数論の伝統のなかで，しかも幾何学と数論の交差する領域において成立したと主張する。しかし，まず最初に，ベッカーによって提示されたところの，正方形の辺と対角線の通約不能性に関するプリミティブな証明の復元の概要を紹介しておく。

II

O．ベッカーは『古典古代の数学的思考』（*Das mathematische Denken der Antike*）の第2章第4節のII（51～52ページ）において，『原論』第X巻付録27に先行すると彼の主張するところの，正方形の辺と対角線の間の通約不能性についてのプリミティブな証明を，骨子以下のように復元提示している。

小石（$\psi\tilde{\eta}\phi o\iota$）を並べて $a^2=2b^2$ を構成する。その際，a と b は互いに素であることを要しない。a^2 を左に1つ，b^2 を右に2つ作る。これらの正方形を同時に4つに分割し，そうして出来た部分正方形をさらに4つに分割していく。すると，その分割はいつかは終わりに達するであろう。その際，その終わり方に大別2つのケースが考えられうる。

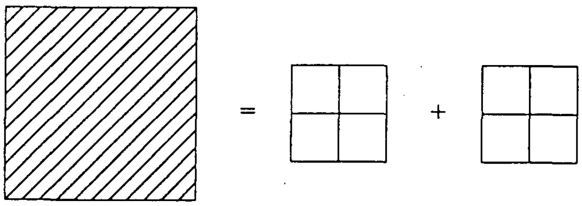
第一のケースは2つに分かれるが，その最初のものは以下のようになる。

斜線の入った正方形は奇数，斜線の入っていない正方形は偶数を表している。そして図は，左側の正方形（奇数）が右側の2つの正方形（偶数）に等しくなる場合を表している。そして，もちろん，これは，ありえないことである。

↘Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente," 533ff.; *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, 37ff.

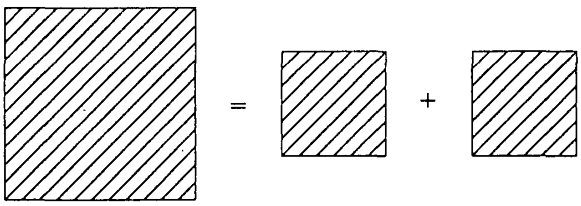
5) O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, 50-52.

6) Walter Burkert, *Ibid.*, 436.



$a' = b' + b'$

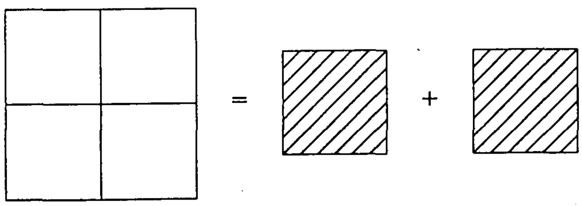
さて，第一のケースの２番目は，４分割が次の図のようになって終わる場合である。



$a' = b' + b'$

斜線の入っている正方形は，前と同じように，奇数を表している。そして図は，左側の正方形（奇数）が右側の２つの正方形（奇数×２＝偶数）に等しい場合を表している。そしてこれもまた，もちろん，ありえないことである。

第二のケースは，その分割が次のように終わる場合である。

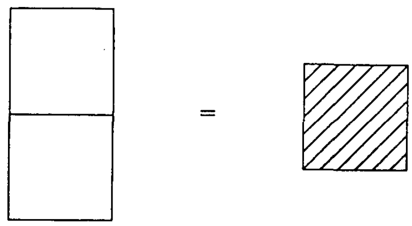


$a'' = b'' + b''$

すなわち左側にはなおもひとつの偶数 a'' が残っているが，右側には２つの奇数が残っている。この場合，左側の偶数 a'' は（偶数の平方数であるから）４分割することが可能であるが，右側は奇数２つだから４分割することはできない。そこで両辺を２分割すると，以下の図のように，

偶数（$\frac{1}{2}a''$）が奇数（b''）となって，またしても矛盾に逢着することになる。

以上のように議論を展開しながら，O．ベッカーは再度にわたり，「小石を敷きつめた」a^2



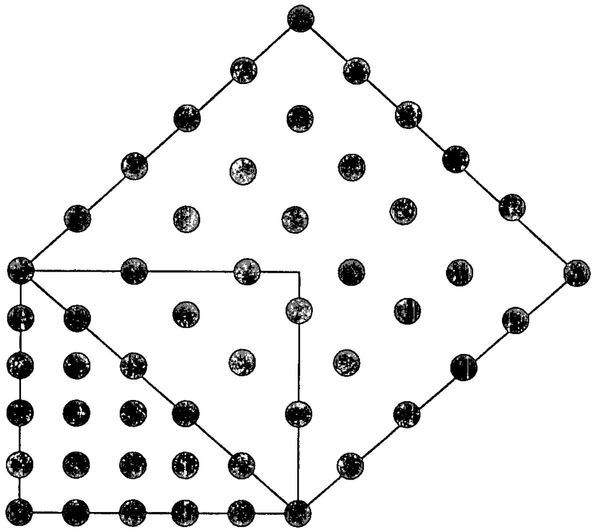
$\frac{1}{2}a'' = b''$

とか b^2 について語っている。“Man denke sich die Zahl a^2 einmal und die Zahl b^2 zweimal mit Steinchen ausgelegt. ...Die dem Beweisgang entsprechenden Figuren (mit Steinchen ausgelegt zu denken) sind....” 問題はしかし，それが実際になしうることであるかどうかである。

ブルケルトが突いたのもまさにその点であった。「ベッカーの再構成の趣旨を汲んで，数 a^2 や b^2 をカウンターでもって表そうと試みるならば，すぐさま，それが不可能だということが分かる」「$a^2=2b^2$ なる式を例示しうるいかなる整数も存在しない」，と。

ブルケルトはこのように述べることによって，その例示なるものが挫折するゆえんを図示するような無駄な試みはしていない。しかし実際，b^2 に相当する小石の集まりからなる正方形を２つ作ることができたとして，その２つの集まりが含む小石の数に等しい数の小石からなる正方形 a^2 を，ひとはいかにしてその左側に陳列することができるであろうか。このことは，それら小正方形の対角線の長さが小石を並べることによっては表せない以上は原理的に出来ないことなのである。というのも，幾何学的図形である正方形の対角線の長さを小石の数によって測ろうとするかぎり，正方形の辺の長さはつねに対角線の長さと同じになってしまい，かくては，小正方形の対角線の上に立つ正方形の面積は小正方形に等しい，と結論づけざるをえなくなるだろうからである。

図において，小正方形の１辺は６個の小石を含んでいる。したがってこの正方形の面積数は36である。このとき，この小正方形の対角線が含む小石の数は，小正方形の１辺が含む小石の数と同数の６である。したがって，もしもひと



がその対角線のうえに立つ正方形の面積を，一目瞭然のこととして分かるはずの辺と対角線の長さの差異には眼を閉ざし，その対角線が含む小石の数を平方することによって決定しようとするならば，当該正方形の面積数もまた36であり，したがって小正方形1個の面積数と対角線のうえに立つ正方形の面積数は同じであると結論しなければならなくなるであろう。そして，そのようにして作られた大正方形の対角線のうえに立つ正方形……というふうに続けていくと，最小の正方形と最大の正方形の面積数は同じであるという途方もない不合理な結論に達しなければならないことになるであろう。

ベッカーによる再構成の試みは原理的な困難を内蔵するものだったといわねばならない。

Ⅲ

いま述べられたことはただちにブルケルトの第3命題，無理性についての最初の発見は数論の領域においてではなく，幾何学の領域においてなされたのではないかという主張に導く。この主張を大枠においてわたしは承認する。ただし，わたしは，ブルケルトが言及するフォン・フリッツ説，すなわち幾何学的領域における最初の無理量の発見は，正12面体の構成に携わったピュタゴラスの徒ヒッパソスによって，まず最初に正五角形の1辺と対角線に関してなされたのか[7]，それとも，ラーデマッヒャーとテープリッツが再構成してみせたように，何者かによって正方形の1辺と対角線の関係についてなされたのか[8]については決定的な何事をも言いえないと感じてはいるものの，どちらかといえばいっそうシンプルな正方形の辺と対角線の関係について，(1)数論とはいっさい無関係に，(2)『原論』第Ⅹ巻命題2が一般的なかたちで，「不等な量のうちのより小なるほうが，次々に，より大なるほうから連続的に引き去られていくとき，残ったものが決してその前のものを測りきることがないならば，それらの量は通約不能であるだろう」と述べているような仕方で，つまり所謂互除法（*ἀνταναίρεσις* あるいは *ἀνθυφαίρεσις*）によって，確認されることになったのではないか，と考えている。事実フォン・フリッツも，ブルケルトが指摘しているように[9]ヒッパソス論文に先立つピュタゴラスに関するパウリ・ヴィッソワ所収論文のなかでは，正方形の対角線のほうこそが無理量の発見に導いたのであると述べている。

しかし，無限互除法による通約不能量の発見と，通約不能な量相互間の関係が数（整数）によって表現できないことの発見とでは，おのずからレベルが違うと言わなければならない。後者のほうが明らかにいっそう進歩した段階を現している。では，無限互除法の適用による通約不能量の発見からその数的表現という新たな段階へと導いた契機は何であるか。ここにこそ，わたしは，ピュタゴラス学派の偶数奇数論を位置づけるべきであると考える。すなわち，本来的には幾何学の領域のものであった通約不能量の問題が，ピュタゴラス学派の図形数の考察の文脈において新たな考察の光を当てられた時点で，それは数論の領域の問題とされ，やがて，『原論』第Ⅹ巻付録27にみられるようなかたちでの証明が与えられることにもなったと考えられるのである。けれども，互除法による通約不能な幾何学的量の発見から第Ⅹ巻付録27の証明

7) von Fritz, "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum," *Annals of Mathematics* 46, 1945, 242–264.
8) Rademacher & Töplitz, *Von Zahren und Figuren*, Berlin, 1930, 258.
9) Walter Burkert, *Ibid.*, 459.

に至る過程には，なおも充たされるべき一個の空隙が存在していたのではないかと思われる。というのは，付録27の証明の特色は，所与の正方形の辺の長さと対角線の長さを数対数の関係として捉えるとともに，それらを互いに素な関係にまで還元し，その結果，辺と対角線のうち一方が偶数であれば他方は奇数でしかありえないものとして条件設定するところにあるのだが，これは相当に洗練された手続きであって，このようなやり方が一挙に獲得されたとは思えないからである。おそらく，通約不能な無理量の問題が数論の領域において考察された最も初期の段階においては，ベッカーが例の再構成において想定したように，辺と対角線相互間の素な関係は前提されていなかったのであろう。

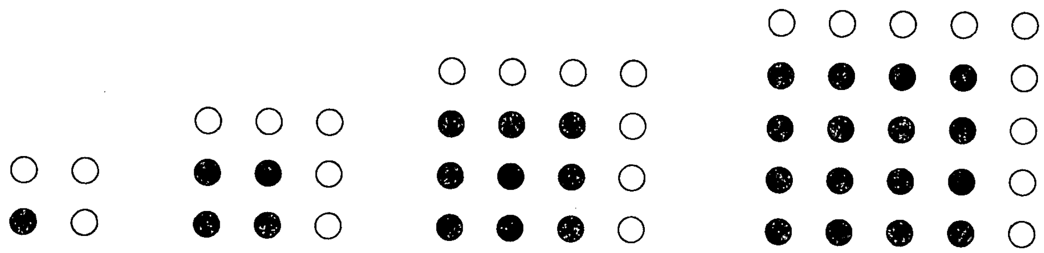
では，そのような段階にあった正方形の辺と↗対角線の通約不能性の証明はいかにして行われたか。以下に一つの推測を立てることにしよう。

Ⅳ

さて，アリストテレスが『自然学』第３巻第４章で述べているように，初期ピュタゴラス学派の数学者たちは ψῆφοι をさまざまな形に配置して図形数の考察を行なったが，その基本となったものは「1」および「2」のまわりに曲尺（グノーモン）をあてがうことによって形作られる正方形数，長方形数であった。これらのうち，いま問題とされなければならないのは正方形数のほうである。

１．正方形数とは，次のようなものであった。

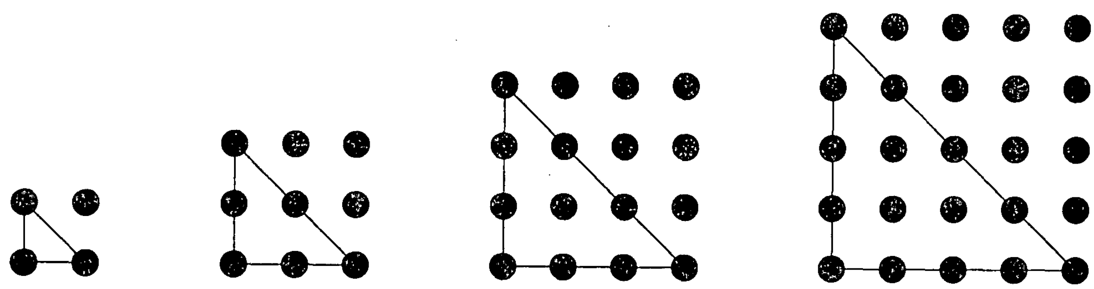
これらの図形は，それぞれ，1+3=2×2，1+3+5=3×3，1+3+5+7=4×4，……といっ



4　　9　　16　　25

たものを表している。つまり，正方形数は１辺を２としてつくられる４から始まり，辺が含む単位の数 n の平方すなわち n^2 で表される数である。ところが，このきわめて具体的で単純な操作のうちに，すでに上において示唆されたよ↗うに，幾何学の領域と数論の領域が交差するところに生ずる，ひとつの幻惑的事実が隠されていたのである。というのは，下図にみられるように，

正方形として表象される任意の数 n^2 にあって，



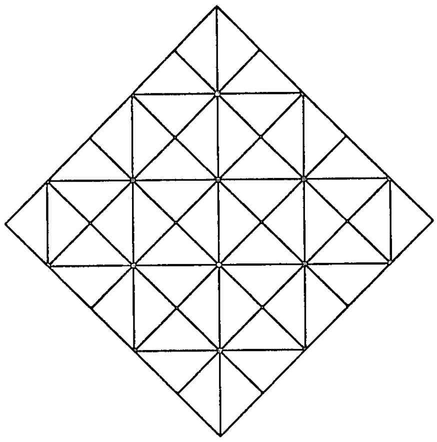
その辺と対角線の長さは明らかに異なるにもかかわらず，それぞれが含む単位（μονάς）としての小石（ψῆφος）の数はつねに同数となるからである。この事実は一方で，図形数による考察が基本的な限界をもつものであることを如実↗に示すものではあるが，他方では互除法の使用によっては必ずしも明確とならなかった辺と対角線の間のパラドクシカルな関係を，いやがうえでも際立たせる効果をもったと思われる。

単位をかぞえることと長さを測ることをいっ

しょにするとき起こってくるこの幻惑的事実が，初期ピュタゴラスの徒によって意識されなかったはずがない。というのも，ギリシア神殿の工事に携わった者，否，イオニア地方の巨大なディプテロス神殿に詣でたことのある誰でもが，身をもってこの事実をよく承知していたからである。信仰心あつい当時の人々はゼウスやヘラの神殿に詣で，プロナオスに林立する柱のジャングルのなかを，あるいは基段の辺に沿って歩みつつ，あるいは柱間を対角線に沿って辿りつつ，正方形の辺と対角線を小石でもって表現したものにおいてひとが体験したであろうものと同質の，奇妙な幻惑を感じていたにちがいないのである。というのは，小石を並べて構成されたピュタゴラス学派の正方形数は，実際，イオニア地方の巨大神殿のプロナオスに林立する柱の構成の雛型そのものだったからである。ピュタゴラスの故郷古代サモス（＝現在のピュタゴリオン）に，ロイコスとテオドロスの設計になるヘライオン（当時世界最大のディプテロス神殿）が姿を現すのは前570年頃，ピュタゴラスがサモスを去って南イタリアのクロトンに移住する40年ほど前のことであった。

こういうわけで，正方形の辺と対角線の通約不能性については，当時の誰でもがこれを体験的に知っており，それらが整数と整数の比によって表現できないであろうということ自体についても，墨縄をもって柱間距離を測ったり，基壇上における柱の配置設計に携わったことのある神殿建築現場の誰でもが，たぶんはそんなことになるだろうと，予想することができたことなのである。無限互除法が出現する日常的基盤は，このような状況にあったであろう。しかし，通約不能量が存在するという事実の明確な認識は，初期ピュタゴラス学派の数学者たちがグノーモンを用いて数論を展開する過程において，正方形の辺と対角線を構成する単位の数が，いかなる場合にも同数になってしまうという逆説的な事実に逢着した段階においてはじめて得られ，そのパラドックス性が気づかれるに至ったのかもしれないのである。

2．他方，付録27の証明の最重要な前提である所謂ピュタゴラスの定理は，その当時までに，『原論』第1巻命題47のような洗練されたやり方ではなしに，すでにさまざまなかたちでの証明が与えられていたであろう。その証明は，あるいは，ハンケルがプレットシュナイダーに依拠しつつ再構成してみせたような素朴なものであったかもしれない[10]。しかし，任意の直角三角形ではなく，その特殊ケースである2等辺直角三角形の場合については，ピュタゴラスの定理を証明することはきわめて簡単なことである。大矢真一はピュタゴラスの発見のなかに平面をいろいろな正多角形（正三角形，正方形，正六角形）で隙間なく敷きつめる問題があることから，ピュタゴラスの定理は，まず敷石の模様から，しかも2等辺直角三角形において発見されたのではないかという推測に言及している。その敷石模様というのは図のようなものである。



そしてこんなことを言っている。「ただここで少し都合の悪いのは，この直角2等辺三角形というものは後にピタゴラスやその弟子達を非常に困らせた形であるということである。すなわち直角2等辺三角形の1辺を1とすると，その斜辺は$\sqrt{2}$となる…[12]」。

しかしわたしは，ピュタゴラスの定理の証明と無理量の発見とはきわめて密接に関連しあっていたにちがいないと考えているので，むしろこの発言は歴史の真実の一端を突いたものであ

10) H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Dalmstadt, 1965, 98.

12) 大矢真一『ピタゴラスの定理』東海大学出版会，1975，22.

ると考える。

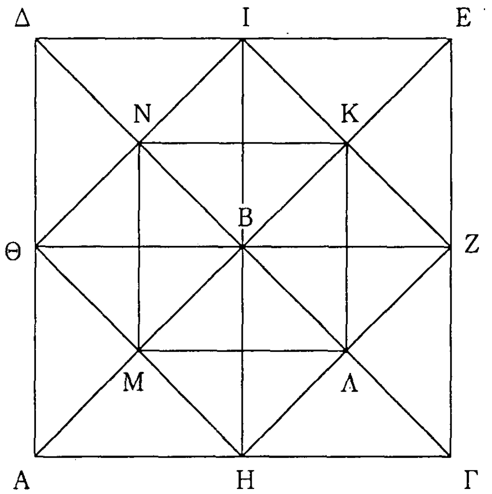
わたしが以下に提示するピュタゴラスの定理の証明は，この敷石に現れるピュタゴラスの定理をいま少しひねったもので，そのひねりは，次に展開する正方形の辺と対角線の間の通約不能性の証明との関連におけるものである。

直角2等辺三角形 $AB\Gamma$ において，$A\Gamma$ はその斜辺，AB は直角を挟む2辺のうちの1辺である。このとき，$AB=B\Gamma=ZH=H\Theta=\Theta I=IZ$ である。そして，その場合

$$A\Gamma^2=2AB^2$$

である。何故ならば，$A\Gamma^2=\square A\Gamma E\Delta$ のうちに三角形 $AH\Theta$ に等しい三角形が8個含まれているが，$AB^2=\square ZH\Theta I$ のうちには同じ三角形が4個含まれているからである。

同じことは $\square ZH\Theta I$ に内接する $\square KAMN$ についても成り立つ。すなわち，$AB^2=2K\Lambda^2$である。



したがって，任意の直角2等辺三角形について，その斜辺の2乗は直角を挟む1辺の2乗の2倍である。

3．さて，正方形数の1辺に含まれる単位の数と対角線に含まれる単位の数が同数になることに幻惑を感じていたピュタゴラスの徒が，正方形の1辺と対角線が数対数の関係として言い表されうるか否かについて，こうしたピュタゴラスの定理と偶数奇数論でもって何事か正確なことを言おうとしたと想像してみよう。そのとき彼は，次のような推論をなすことにより，すぐさま，不合理な事実に直面したであろう。

前図において，$A\Gamma^2$ は正方形である。ところで，(1)正方形数とは2つの等しい数の積である（『原論』第Ⅶ巻定義19を参照）。そして，(2)ひとつの数は，奇数であるか偶数であるかいずれかである。そこで，まず最初に

Ⅰ．$A\Gamma^2$ は奇数の正方形数であると仮定しよう。しかし，その仮定は不合理である。何故ならば，ピュタゴラスの定理により，$A\Gamma^2=2AB^2$ であるから，$A\Gamma^2$ は偶数でなければならないからである。したがって，$A\Gamma^2$ は奇数の正方形数ではなくて偶数の正方形数である。

しかるに，$A\Gamma^2$ は偶数の正方形数でもありえない。何故なら，

Ⅱ．$A\Gamma^2$ が偶数の正方形ならその1辺は2等分される（第Ⅶ巻定義6を参照）。しかるに $AB^2=2K\Lambda^2$ であるから，AB^2 の1辺も2等分される。そして $K\Lambda^2$ の1辺も2等分されるであろう。このことは，ひとつの正方形とそれに内接する正方形の関係についてつねに成り立つことである。この過程は，内接正方形の1辺が単位（=1）となるまで続けられるであろう。そしてそのとき，当該内接正方形は単位正方形（面積1の正方形）となり，この正方形の対角線を1辺とする正方形の面積は2となるであろう。しかるに，1はもはや2つに分割されえず，そして2はいかなる意味でも正方形の面積数ではないであろう。何故なら，一方で1はもはや偶数ではないからであり，他方，2はたしかに偶数であるとはいうものの，正方形数ではないからである。というのも，正方形数とは「2つの等しい数によって囲まれた数」（第Ⅶ巻定義19）であるが，2はいかなる等しい数によっても囲まれていないからである。したがってそれは正方形数ではない。が，それは，それに外接する正方形に内接する正方形の面積数であるはずであった。これは不合理である。この不合

理は $A\Gamma^2$ が偶数の正方形であるという仮定から導かれた。したがって，$A\Gamma^2$ は偶数の正方形数でもありえない。

Ⅲ. $A\Gamma^2$ は，もしそれが数であるならば奇数であるか偶数であるかである。ところで $A\Gamma^2$ は正方形数であり，正方形数は等しい数に等しい数をかけあわせたもの（第Ⅶ巻定義19）であるから，奇数の奇数倍（第Ⅸ巻命題23）であるか偶数の偶数倍（第Ⅸ巻命題21）であるかである。したがって，$A\Gamma$ は奇数であるか偶数であるかである。しかるに，$A\Gamma^2$ は奇数でも偶数でもなかった。したがって $A\Gamma$ は奇数でも偶数でもない。それゆえ，2等辺直角三角形 $AB\Gamma$ の1辺である AB と対角線 $A\Gamma$ は数対数の関係にはない。したがってそれらは互いに通約不能である。

Ⅴ

上に述べられた『原論』第Ⅹ巻付録27に先立つ正方形の辺と対角線の間での線型通約不能性に関する仮説的構成は，もちろんあくまでも一つの推測にすぎない。しかしこの推測は，おそらく，先に見たO．ベッカーの再構成よりは，いっそう歴史的現実に近いものだとわたしは考える。

さてしかし，わたしの議論におけるこの段階において，ブルケルトの第2命題，すなわち「ピュタゴラス学派は単位（=1）を偶数かつ奇数であるとみなした。しかるに，『原論』第Ⅹ巻付録27における線型通約不能性の証明の基本的前提は，すべての数は偶数であるか奇数であるかだとする偶数奇数間の完全な排反的関係である。これが前提となってはじめて，付録27の証明は妥当となる」が効いてくる。わたしの議論は明らかに「すべての数は偶数であるか奇数であるかであって第三項は存在しない（tertium non datur)」ということを前提している。したがって，ブルケルトのいうことが正しいならば，『原論』付録27にみられる正方形の辺と対角線の線型通約不能性の証明を，その前段階にあったいまひとつのアルカイックな証明を仮説的に構成してピュタゴラス学派の伝統に結びつけようとするわたしの議論は，その根拠を失うと考えられるかもしれない。

しかし，実際には，ブルケルトの議論はわたしの仮説構成の妥当性を否定する根拠とはならない。なぜなら，ブルケルトの第2命題が主張していることは，分析的には，

(1) ピュタゴラス学派は単位（=1）を偶数かつ奇数であるとみなした

(2) 『原論』第Ⅹ巻付録27の基本的前提は，すべての数は偶数であるか奇数であるかだとする偶数奇数間の完全な排反的関係である

という2つの命題によって表現されうるが，これら2つの命題は，互いに，（ブルケルトはおそらくそう考えているのであろうが），必然的な仕方で

(1)′ ピュタゴラス学派は単位（=1）を偶数かつ奇数であるとみなしたが

(2)′ 『原論』第Ⅹ巻付録27の著者は，単位（=1）を含めてすべての数は偶数であるか奇数であるかだとする偶数奇数間の完全な排反関係を認めていた

というふうに関連づけられねばならないことはないからである。しかるに，もしもそのような関連づけがなされねばならなかったとすると，当然，上の(1)′，(2)′からは

(3)′ したがって，『原論』第Ⅹ巻付録27の著者はピュタゴラス学派の数論の伝統とは切り離された人物である

という結論が出てくることになるであろう。しかしもしも(2)命題を

(2)″ 『原論』第Ⅹ巻付録27の基本的前提は，単位（=1）以外のすべての数は偶数であるか奇数であるかだとする偶数奇数間の完全な排反的関係である

と読み替えることができるならば，そして，実際に『原論』第Ⅹ巻付録27の著者が正方形の辺と対角線の間の通約不能性を証明するに際して，数対数の関係にあるものとして仮定した場合の辺と対角線の間の関係を，まさにそのようなものとして捉えていることが実証できるならば，ブルケルトの第2命題が含意するであろう「『原論』第Ⅹ巻付録27の著者はピュタゴラス学派の

伝統から切り離された人物である」という結論の妥当性は奪われることになるのである。

さて，いま述べたことは，実際に，問題の付録27の証明構造を分析することによって実証しうることなのである。以下に付録27の拙訳を掲げる[11)]。

正方形において，対角線がその一辺の長さにおいて通約不能であることがわれわれの証明すべきことであるとしよう。$AB\Gamma\Delta$ を正方形であるとし，$A\Gamma$ をその対角線であるとせよ。わたしは，ΓA が AB と長さにおいて通約不能である，と言う。

何故なら，もし可能なら，通約可能だとしてみよ。その場合，同じ数が偶数かつ奇数であるという結果になるであろう，とわたしは言う。さて，$A\Gamma$ からなる正方形が AB からなる正方形の2倍であることは明らかである。そして，(1) ΓA は AB と通約可能であるから，ΓA は AB に対し，数が数に対する比をもつ（*καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ. ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν*）。EZ が H に対する比がそれであるとし，(2) EZ と H の比は同じ比をもつもののなかで最小だとせよ。すると，EZ は単位(1)ではない。何故なら，もし EZ が単位で，$A\Gamma$ が AB に対してもつ比を H に対してもち，$A\Gamma$ が AB より大だとすると，EZ もまた，数 H より大だということになる。これはまさに不合理である。したがって，EZ は単位ではない。だから，数である。（*καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα.*）そして，EZ は H に対して，ΓA が AB に対してあるごとくにあるのだから，EZ からなる正方形は H からなる正方形に対して，ΓA からなる正方形が AB からなる正方形に対するごとくにある。ところで，ΓA からなる正方形は AB からなる正方形の2倍である。だから，EZ からなる正方形も H からなる正方形の2倍である。したがって，EZ からなる正方形は偶数である。こうして，EZ そのものも偶数である。何故ならば，もしそれが奇数だったとすると，それからなる正方形もまた奇数だったはずだからである。というのも，どれだけの奇数が加え合わされようと，加え合わせの数〔回数〕が奇数である場合には，その全体も奇数だからである。したがって，EZ は偶数である。Θ においてこれが2等分されたとせよ。すると，EZ と H は，同じ比をもつものどものうち最小のものであるのだから，(3)それらは互いに素である。で，EZ は偶数である。したがって，H は奇数である。（*πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν. καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστιν ὁ Η.*）何故ならば，もしそれが偶数だったとすると，EZ と H の双方を2が割り切ることになっただろうからだ。すべて偶数は半分の部分をもつからだ。ところが，それらは互いに素である。これはまさに不可能なことである。したがって H は偶数ではない。だから奇数である。そして，EZ は Θ の2倍であるから，EZ からなる正方形は，$E\Theta$ からなる正方形の4倍である。ところが，EZ からなる正方形は H からなる正方形の2倍である。したがって，H からなる正方形は $E\Theta$ からなる正方形の2倍である。それゆえに，上で言われた理由により，H は偶数である。しかしそれは，奇数でもある。これはまさに不可能なことである。ゆえに，ΓA は AB と長さにおいて通約可能でない。これがまさに，証明されるべきことであった。

---

(1)は，ΓA が AB と通約可能であるなら，ΓA は AB に対し数が数に対する比をもつ，という。これは，『原論』第Ⅹ巻命題5，6〔命題5「通約可能な量は互いに1つの数が1つ

11) 翻訳のテクストは，Heiberg 版：*Euclides Elementa* Vol. III Liber cum Appendice, Post I. L. Heiberg, edidit E. S. Stamatis, 1972 である。

の数に対する比をもつ」，命題6「2つの量が互いに数対数の比をもつならば，それらの量は通約可能である」〕が言っていることを前提していることを意味する。数対数の関係にある量のみが「通約可能」という範疇にあるということである。

(2)は，ΓA 対 AB の比をもつ最小のもの EZ と H を設定し，EZ が単位（$=1$）でありえないことをいう。この証明をいっそう詳しく言うと次のようになるであろう。

EZ が1であると仮定する。そのときには，(1)$EZ:H=A\Gamma:AB$（仮定）であり，(2)$A\Gamma>AB$（仮定）であるから，(3)$EZ>H$ である。しかるに，$A\Gamma$ と AB の関係は仮定により通約可能であり，それゆえにそれらは数：数の関係にあるのだから，(4)$EZ:H=$数：数である。したがって，(5) H は数である。そこで，EZ が1であるなら，(6) $1>H$ である。しかるに H は数であるから，(7) $H>1$ である。したがって，(8)$1>H>1$ である。それゆえにまた，(9) $1>1$ である。しかしこれは不合理である。したがって，$EZ=1$ の仮定は却下される。したがって，EZ は1ではなくて数である。

---

(3)は，「互いに素な数とは共通尺度としての単位によってのみ割り切られるところのものである」（第Ⅶ巻定義12）ことを前提にして，互いに素な関係にある EZ と H は，一方が偶数であれば他方は必ず奇数であるという。

これら(1)(2)(3)が言っていることは，全体として次のようにまとめることができるであろう：

互いに素である数：数の関係にある任意のものについては，一方が偶数であれば他方は奇数であると言うことができる。ただし，1は数ではないから，この場合の数：数の関係項たることはできない。

「EZ は単位ではない。だから，数である」(οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ EZ· ἀριθμὸς ἄρα.) という言葉は，いま述べた命題が付録27の著者にとって妥当なものであったことを正確に告げている。

しかし，ここで，異論があるかもしれない。すなわち，ここで $EZ=1$ の仮定が退けられるのは，正方形の辺や対角線の長さが問題であるときには当然のことであろうが，マイナスの長さを考えるわけにはいかないのであって，そのことをこの付録27の著者は言っているにすぎないであろう，と。つまり，この著者が言おうとしているのは，互いに素で一方が他方より大である EZ と H については，$EZ>1$ については語りえても，$1>H$ については語りえないのであって，そのことは要するに，この付録27の著者にとっては，その1辺が長さ1であるところの単位正方形が考えうる最小の正方形であったことを意味したのである，と。

しかし，どうもそうではないらしいのである。何故なら，この付録27には別証明があって，その別証明のなかでは，付録27とはちょうど逆の仮定，つまり $EZ:H$ なる関係にある H について，$H=1$ の仮定が成り立たないことが言われているからである。別証明の拙訳を次に掲げる。

〔正方形の対角線とその辺が通約不能であることが，別の仕方でも証明されなければならない。〕

対角線 A に対するに，辺 B があるとせよ。わたしは，A と B が長さにおいて通約不能である，と言う。何故なら，もしできるなら通約可能だとし，ふたたび，A が B に対するように EZ が H に対してあり，EZ と H は，それらと同じ比をもつものどものうち最小だとせよ。すると，EZ と H は互いに素である。まずわたしは，Hは単位ではない，と言う。何故なら，もし可能なら，単位だとしてみよ。すると，A が B に対するように EZ は H に対してあるのだから，EZ からなる正方形は H からなる正方形に対して，A からなる正方形が B からなる正方形に対するようにあることになる。ところで，A からな

る正方形は B からなる正方形の2倍である。だから，EZ からなる正方形も H からなる正方形の2倍である。そして，H は単位である。したがって，EZ からなる正方形は2である。これはまさに不可能なことである。したがって，H は単位ではない。したがって数である。そして，A からなる正方形が B からなる正方形に対するように，EZ からなる正方形は H からなる正方形に対してあり，逆に，B からなる正方形が A からなる正方形に対するように，H からなる正方形は EZ からなる正方形に対してあるのだから，B からなる正方形は A からなる正方形を割り切り，したがって H からなる正方形も EZ からなる正方形を割り切る。その結果，辺 H そのものが EZ を割り切ることになる。しかるに，H は自分自身をも割り切る。したがって H が，互いに素な関係にある EZ と H を割り切ることになる。これはまさに不可能なことである。したがって，A と B は長さにおいて通約可能ではない。したがって通約不能である。これがまさに証明されるべきことであった。

H を単位と仮定するとき（ピュタゴラスの定理により）EZ^2 が2になるが，「これはまさに不可能なことである」（ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον）と言われている。いったい何が不可能なのかと，ひとは驚き怪しむのではないか。1を数として観念している近代人のわれわれには，その面積が2である正方形も，また1辺が1である正方形の対角線が2の平方根となることも，不可能でも何でもなく，かえって自明の真理である。

ところが，この別証明を与えた人にとってはそうではなかったのである。この証明を行なった人物にとっては，1はそもそも数ではなかったのである。だからこそ，通約可能だと仮定された EZ と H の関係にあって——通約可能であるということが数：数の関係を意味するかぎりは—— H が1の場合はそもそも初めから排除されなければならなかったのである。H が単位であると仮定すると，$EZ^2=2H^2$ であるから，EZ^2 は2となるが，2は正方形数では全然ないからである！「正方形数」とは，第VII巻定義19によれば，「等しい数に等しい数をかけあわせたもの」，あるいは，「2つの等しい数によって囲まれた数」（ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος）である。ところが，2はこの定義にまったく合致しない。2を囲む等しい数（≠単位）など存在しない。この定義に合致する最小の正方形数は4である！　だからこそ，この別証明を与えた人にとっては，辺が1である正方形の対角線上に立つ正方形を考えることはまったくの不可能事に属したのである。しかし，面積が2である正方形を「不可能」と考える人物が，どうして2の平方根なるものを思いつくことができたであろうか！

このことの考慮は必然的に次の結論に導く。すなわち，ギリシア数学史研究にたずさわった世界的権威のほとんどすべての人々が，例外なく，これまで，『原論』第X巻付録27そのものが，ギリシアにおける最も初期の線型通約不能性の証明であったと認め，しかもその証明は，1辺が1である正方形の辺と対角線についてなされたものであると一様に認めてきたのだが，それは誤りであったということである。付録27の著者にとって，いったい何故，対角線 EZ が単位ではないことの証明が必要であったのかということは，この証明を与えた人物が，別証明の著者と同様に，単位を数ではないとする信念を共有するとともに，そもそも1が正方形を表現しうるなどということは不条理そのものだと考えていたのでないならば，了解不可能なことだからである。

というのも，EZ が1であるなら，ピュタゴラスの定理により $EZ^2=2H^2$ であり，他方，$1^2=1$ だとすれば，$1=2H^2$ であり，したがって1は半分に分割されうるはずで，半分に分割されうるのは偶数なのだから，1は偶数である，ということにならざるをえないであろうが，そもそも1は，付録27の著者にとっては，それが数のアルケー（元）であり，数なるものが偶数か奇数かに分けられるかぎりにおいて——なるほど附帯的な仕方では，つまり数というものに

ついての異なるレベルの語りにおいては，偶数でも奇数でもあったにしても（Arist., *Met.* 986a19-20)—原理的には，それは本来偶数でも奇数でもなく，否，数ですらなかったからである。したがってこの付録27の証明を与えた人物もまた，1辺が1である正方形における対角線と辺との関係については，これを思惟するべからざることとして考慮の外に置いたのであり，したがってまた，その対角線の長さを問題とするまでには至らなかったとしなければならない。

Ⅵ

結論を述べるべき時がきた。ここで冒頭に立ち帰り，ブルケルトの3つの命題との関係においてわたしの主張を明確にすることとしよう。

Ⅰ　ブルケルトの第1命題は，ψῆφοι を用いるプリミティブなピュタゴラス学派の数論は『原論』第Ⅹ巻付録27における正方形の辺と対角線の線型通約不能性の証明と背反するものであるというものであった。この主張に対して，いまや次のように言うことができる。

(1)　『原論』第Ⅹ巻付録27の証明に用いられている数論上の命題は，起源のきわめて古いことが分かっているピュタゴラスの定理ならびに第Ⅹ巻命題5，6〔通約不能性の定義にかかわるもの〕を除けば，その大枠において，第Ⅶ巻諸定義ならびに第Ⅸ巻命題21-34のいわゆる偶数奇数論に密着したものとなっている。証明の過程において用いられる順に挙げれば，それらの諸定義，命題は次のとおりである。『原論』第Ⅰ巻命題47［ピュタゴラスの定理]，第Ⅶ巻命題33，第Ⅹ巻命題5，6，第Ⅶ巻定義13，第Ⅶ巻命題22，第Ⅶ巻定義2，第Ⅶ巻定義6，第Ⅶ巻定義19，第Ⅸ巻命題23，第Ⅶ巻定義11，第Ⅸ巻命題21，第Ⅶ巻定義8，第Ⅶ巻定義15。

(2)　その証明の基本的前提として，単位（=1）を数でないとする考え方があるが，これは第Ⅶ巻定義1「単位とは，存在するものの各々がそれによって1と呼ばれるところのものである」ならびに定義2「数とは単位からなる多である」によく合致するものであるとともに，アリストテレスが『形而上学』(1057a3)において報告するところのピュタゴラス学派の「数」についての考え方，すなわち数とは「一によって測られる多」(πλῆθος ἑνὶ μετρητόν）という考え方ともよく整合するものである。ピュタゴラスの徒たちにとっては，一そのものは数ではなく，数が，したがってまた全世界がそれから成るところの「単位」であった。

(3)　ψῆφοι 数論において「小石」(ψῆφος）が表すところの「単位」と『原論』第Ⅶ巻定義1における「単位」とは相互に不整合ではない。小石のそれぞれは，各々がそれによって「1」と呼ばれるところのものを表しており，そして，それらの1がかたちづくるところのものが「多」としての「数」を形成する。

(4)　第Ⅶ巻定義6～11にみられる偶数および奇数に関する諸定義，ならびに第Ⅸ巻命題21～34における偶数奇数論のO. ベッカーによるψῆφοι 数論としての復元の試みは，評価しなければならない業績である。

(5)　したがって，『原論』第Ⅶ巻諸定義ならびに第Ⅸ巻命題21-34はなによりもピュタゴラス学派の伝統に属するものであるとみなされてよい。

(6)　それゆえ，ψῆφοι 数論と付録27における無理性の理論が互いに背反しあうのは，O. ベッカーが例示したような特定の局面においてであって，それらは元来ブルケルトの主張するような全面的背反関係にあるのではない。

Ⅱ　ブルケルトの第2命題は，ピュタゴラス学派は単位（=1）を偶数かつ奇数とみなしたが『原論』第Ⅹ巻付録27における線型通約不能性の証明の基本的前提は「すべての数は偶数であるか奇数であるか」という偶数奇数間の排反関係である，というものであった。この主張に対してわたしは次のように言う。

(1)『原論』第Ⅹ巻付録27の基本的前提は，「単位（=1）以外のすべての数は偶数であるか奇数であるかである」とするものであること，

さらに，「互いに素な関係にある数については，一方が偶数であれば他方は奇数であるということができるが，1は数ではないから数：数の関係項であることはできない」とするものであることが明らかにされた。

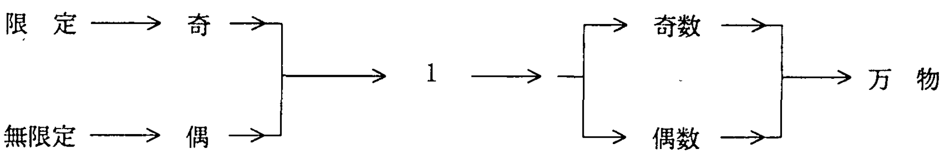
(2) すなわち，付録27の証明にあっては，数：数の関係項のひとつとして単位（=1）が入ってくることが意識的に回避されている。

(3) ピュタゴラスの徒が単位（=1）を偶（数）かつ奇（数）とみなしたことについては，たしかにアリストテレスの証言がある。すなわちアリストテレスは『形而上学』986a1-21 においてピュタゴラス学派のある人々の数についての考え方に言及し，こう言っている：

「彼らによると，数の要素は偶と奇であり（*τοῦ δὲ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν*），後者は限られたもの（*πεπερασμένον*）で前者は無限なもの（*τὸ ἄπειρον*）である。1はこれら両者から成る（*τὸ δ' ἓν ἐξ ἀμφοτέρων εἶναι τούτων*）。というのも，1は奇かつ偶であるから（*καὶ γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν*）。しかるに数は1から成り（*τὸν δ' ἀριθμὸν ἐκ τοῦ ἑνός*），そして天界全体も，先に述べたように，数である。」

と。アリストテレスのこの証言の文意は甚だ明確でない。したがって，さまざまな解釈がある。が，ごく素直な解釈をすれば，上に言われていることは次のような図式で表されることであろう。

限定と無限定という2つの原理の二元的対立は，ピュタゴラス学派にとって最も基本的なものである。限定と無限定それぞれの種概念のようなものとして，それぞれ奇の原理，偶の原理があり，これらを一つに統合したものとして1がある。この1から数が出来るが，数は奇数と偶数に分かれ，万物はこれらから成ることになる。



「1は奇かつ偶であるから（*τὸ δ' ἓν ···γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν*）」というアリストテレスの言葉に関連してアレクサンドロスとスミルナのテオンは，ピュタゴラスの徒が数1を奇であるとともに偶であるとし，“*ἀρτιοπέριττος*”（偶奇）と呼んだと言っている。その理由としてテオンは，偶数に1が加わると奇数が生じ，奇数が加わると偶数が生ずるから，と述べている[13]。ガスリーはしかし，これでは説明になっていない，何故ならテオンが1について言っていることはあらゆる奇数について当てはまることだから，と言っている。そして，「すべて数は奇数性ないし偶数性を分与されているゆえに，それら〔奇数性および偶数性〕が数の基本的な要素であり，そしてそれら自身は，限定と無限定を体現しているのである。いちばん初めにそれらは1を生むが，これは，数系列の原理として，その外側にあり，それ自身のうちに奇数性と偶数性を結合せしめているものとみなされるのである」［強調は筆者による］[14]，と言う。ヒースの意見も同様である[15]。妥当な考えであろう。であれば，「数系列の原理」で「数系列の外側にある」このような1が，数：数の関係項のひとつたりえないことは明らかだと言わなければならない。

(4) ピュタゴラス学派の1についてのこの考え方は『原論』第VII巻定義1における単位（=

13) W. D. Ross, *Aristotle's Metaphysics*, A Revised Text with Introduction and Commentary, Vol. I, Oxford, 1958, 149 を参照。

14) W. K. C. Guthrie, *A History of Greek Philosophy*, Vol. One, The Earlier Presocratics and The Pythagoreans, Cambridge University Press, 1967, 243–244.

15) T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Vol. I, 1921, 71.

1）についての考え方と整合する。そして，付録27の証明における単位（＝1）についての考え方は，第Ⅶ巻定義1に完全に合致するものであった。したがって，ブルケルトの第2命題は却下されうるのである。

Ⅲ　ブルケルトの第3命題は，ギリシアにおける無理性の発見は，元来，数論の領域においてではなくて，幾何学の領域においてなされた，というものであった。

(1)　この主張はおそらく正しい。その点でわたしは異論をもたない。ただし，

(2)　おそらくはラーデマッヒャーとテープリッツが再構成してみせたような，あるいはクルト・フォン・フリッツが正五角形の1辺と対角線の間に想定したような，無限互除法による幾何学的領域における無理量の発見は，すぐさま『原論』第Ⅹ巻付録27にみられるような正方形の辺と対角線の間における線型通約不能性の数論的証明に移行したのではないであろう。

(3)　これに先立って，無限互除法による幾何学的無理量の発見と付録27の間の空隙を埋めるところの素朴でアルカイックな，そしてピュタゴラスの定理の証明のあり方に密着した，しかもピュタゴラス学派の偶数奇数論のあり方に大幅に規定されたところの，正方形の辺と対角線の間に互いに素な関係を前提しないところの無理量の発見が——おそらくはわたしが再構成してみせたようなものに近似した仕方で——幾何学と数論の交差する領域において生じたであろう。

(4)　ところでしかし『原論』第Ⅹ巻付録27命題は，1を排除するその特異な証明のあり方からして，一方ではピュタゴラス学派との繋がりを推察させるとともに，他方ではその面積が2であるところの正方形を視野の外に置いたものであったことによって，単位正方形の対角線が$\sqrt{2}$となることをストレートに見出したものとは言いがたい古態的なものであった。したがって，この証明をもってしてはアルパッド・サボーのように，従来は直観的・経験的であったギリシア数学が反—図解的・反・経験的で端的な思惟の世界へと移行した最古のメルクマールである[16]などと断定するわけにはいかないであろう。

(5)　第Ⅹ巻における付録27と命題9とを分け隔てる距離は大きい。しかもその間には，プラトン『テアイトス』篇が報告するところの，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，……$\sqrt{17}$のテオドロスによる個別的な証明がある。こうして，古代ギリシアにおける無理性発見史のありのままなる再現は，未だに開かれた課題であると言わなければならない。

16）アルパッド・サボー『ギリシア数学の始原』（中村幸四郎・中村清・村田全　訳，玉川大学出版部）1978年，254ページ。